


DS 2 - mardi 13 décembre 2022 - sujet B

Durée : 1h50

Calculatrice est autorisée

Nom : Prénom :

TOTAL sur 20	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	Exercice 4
	/ 8	/4	/6,5	/ 1,5

Exercice 1.

8 points

On considère les fonctions h et f définie sur $[0; +\infty[$ par : $h(x) = x - \frac{1}{4}x^2$ et $f(x) = \ln(2x+1)$.

On note P la courbe représentative de h et \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans un repère.

- Étudier les variations de la fonction h sur $[0; +\infty[$.
- Étudier les variations de la fonction f sur $[0; +\infty[$.
 - Déterminer une équation de la tangente \mathcal{T}_0 à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0.
- On se propose d'étudier la position de \mathcal{C}_f par rapport à P. Pour cela on considère la fonction ψ , définie sur $[0; +\infty[$ par $\psi(x) = f(x) - h(x)$.
 - Calculer la dérivée ψ' de ψ . En déduire le sens des variation de ψ .
 - Calculer $\psi(0)$. Déterminer enfin le signe de ψ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

On pourrait également démontrer que la courbe \mathcal{C}_f est en dessous de sa tangente \mathcal{T}_0 .

- Déterminer une primitive H de la fonction h sur $[0; +\infty[$.
 - Montrer que la fonction F définie sur $[0; +\infty[$ par $F(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln(2x+1) - \left(x + \frac{1}{2}\right)$ est une primitive de la fonction f .
 - La suite du problème se fera au moins de mars, il vous faudra encore un peu de patience !

Correction

Sujet tiré du Baccalauréat ES Sportifs de haut-niveau septembre 1996

On considère les fonctions h et f définie sur $[0; +\infty[$ par : $h(x) = x - \frac{1}{4}x^2$ et $f(x) = \ln(2x+1)$.

On note P la courbe représentative de h et \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans un repère.

- On a $h(x) = x - \frac{1}{4}x^2$

Alors la fonction h est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $[0; +\infty[$



$$\text{D'où } h'(x) = 1 - \frac{1}{4} \times 2x = 1 - \frac{1}{2} \times x$$

$$\text{Donc } h'(x) = \frac{2-x}{2}$$

D'où $h'(x)$ est du signe de $2-x$

On en déduit donc le tableau de variations de la fonction h

x	0	2	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-
Variation de h			

2. (a) On a $f(x) = \ln(2x+1)$

Alors la fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$

$$\text{On a } f = \ln(u) \quad \text{alors} \quad f' = \frac{u'}{u}$$

$$\text{avec } u(x) = 2x+1 \quad \text{et} \quad u'(x) = 2$$

$$\text{D'où } f'(x) = \frac{2}{2x+1}$$

D'où le signe de $f'(x)$ est du signe de $2x+1$ sur $[0; +\infty[$

On en déduit donc le tableau de variations de la fonction f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
Variation de f		

- (b) L'une équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0 est de la forme $\mathcal{T}_0 : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$$\text{avec } f'(0) = \frac{2}{2 \times 0 + 1} = 2 \quad \text{et} \quad f(0) = \ln(2 \times 0 + 1) = \ln(1) = 0$$

$$\text{D'où } \boxed{\mathcal{T}_0 : y = 2x}$$

3. On se propose d'étudier la position de \mathcal{C}_f par rapport à \mathcal{P} , on considère la fonction ψ , définie sur $[0; +\infty[$ par $\psi(x) = f(x) - h(x)$.

- (a) On a $\psi(x) = f(x) - h(x)$

Alors la fonction ψ est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $[0; +\infty[$

$$\text{D'où } \psi'(x) = f'(x) - h'(x) = \frac{2}{2x+1} - \frac{2-x}{2}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{2 \times 2 - (2-x)(2x+1)}{2(2x+1)} \\
 &= \frac{4 - 4x - 2 + 2x^2 + x}{2(2x+1)} \\
 &= \frac{2x^2 - 3x + 2}{2(2x+1)} \\
 &= \frac{2x^2 - 3x + 2}{2(2x+1)}
 \end{aligned}$$

Or sur $[0; +\infty[$, $2(2x+1) > 0$ d'où $\psi'(x)$ est du signe de $2x^2 - 3x + 2$

Etudions le signe de $2x^2 - 3x + 2$ en calculant le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 9 - 16 = -7 < 0$

D'où $2x^2 - 3x + 2$ est du signe de $a = 2$, c'est à dire que $2x^2 - 3x + 2 > 0$

On en déduit que sur $[0; +\infty[$, $\psi'(x) > 0$

D'où la fonction ψ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

(b) Comme $\psi(0) = f(0) - h(0) = 0$

On peut en déduire de la question précédente que sur $[0; +\infty[$, $\psi(x) > 0$

C'est à dire que sur $[0; +\infty[$, $f(x) - h(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > h(x)$

Donc sur $[0; +\infty[$, la courbe \mathcal{C}_f est au dessus de P

D'après les différentes informations, on peut montrer que sur $[0; +\infty[$, la courbe \mathcal{C}_f est comprise entre \mathcal{T}_0 et P.

4. (a) On a $h(x) = x - \frac{1}{4}x^2$

Alors le fonction h est continue sur $[0; +\infty[$, on peut alors lui déterminer une primitive H

$$\text{D'où } H(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^3$$

Donc une primitive de h sur $[0; +\infty[$ est H, définie par $H(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^3$

(b) La fonction F sera une primitive de la fonction f si sur $[0; +\infty[$ $F'(x) = f(x)$.

$$\text{On a } F(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln(2x+1) - \left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Alors la fonction F est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme somme d'un produit de fonctions dérivables et d'une fonction polynomiale sur $[0; +\infty[$

$$\text{On a } F = u \times v - w \quad \text{et} \quad F' = u'v + uv' - w' \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u(x) = x + \frac{1}{2} & \text{et} & u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln(2x+1) & \text{et} & v'(x) = \frac{2}{2x+1} \\ w(x) = x + \frac{1}{2} & \text{et} & w'(x) = 1 \end{cases}$$

$$\text{D'où } F'(x) = 1 \times \ln(2x+1) + \left(x + \frac{1}{2}\right) \times \frac{2}{2x+1} - 1$$



$$= \ln(2x+1) + \frac{2x+1}{2} \times \frac{2}{2x+1} - 1$$

$$= \ln(2x+1) + 1 - 1 = \ln(2x+1) = f(x)$$

Donc la fonction F est bien une primitive de la fonction f sur $[0; +\infty[$

(c) La suite du problème se fera au moins de mars, il vous faudra encore un peu de patience !

i. Calculer $I = \int_0^1 2x \, dx$ et $J = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{4}x^2 \right) dx$.

ii. Soit A l'aire de la partie du plan comprise entre \mathcal{C}_f l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

Montrer que : $1 \leq A \leq \frac{5}{12}$.

**Exercice 2.**

4 points

On donne la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n , par :

$$\begin{cases} t_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, t_{n+1} = t_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout naturel n , on a : $t_n = \frac{n}{n+1}$
2. Que peut-on dire sur la convergence de la suite (t_n) . Justifier.

Correction

On a la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n , par : $t_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, t_{n+1} = t_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

1. On doit démontrer par récurrence la propriété : pour tout entier non nul n $P_n : t_n = \frac{n}{n+1}$

- Initialisation : Pour $n = 0$, alors $\frac{0}{0+1} = 0 = t_0$

La propriété est initialisée.

- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que la propriété P_k est vraie c'est-à-dire $t_k = \frac{k}{k+1}$, montrons que la propriété P_{k+1} est vraie c'est-à-dire $t_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$.

$$\begin{aligned} \text{On a } t_{k+1} &= t_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k(k+2)}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k+1}{k+2} \end{aligned}$$

La propriété est héréditaire.

- Conclusion : On vient de démontré que la propriété P_n est initialisé au rang 0 et héréditaire, d'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$ la propriété P_n est vraie

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, t_n = \frac{n}{n+1}}$

2. On va chercher la limite de la suite (t_n)

On sait que $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = \frac{n}{n+1}$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n+1 = +\infty$ alors par quotient on obtient une forme indéterminée



$$\text{Alors } \frac{n}{n+1} = \frac{n}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

$$\text{Et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$

$$\text{Alors par inverse } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 1$$

Donc la suite (t_n) converge vers 1

**Exercice 3.**

6,5 points

Une entreprise fabrique des balles de tennis et dispose de trois chaînes de fabrication appelées A, B, C.

- La chaîne A fabrique 30 % de la production totale de l'entreprise.
- La chaîne B en fabrique 10 %.
- La chaîne C fabrique le reste de la production.

En sortie de chaînes, certaines balles peuvent présenter un défaut : 5 % des balles issues de la chaîne A ; 5 % des balles issues de la chaîne B et 4 % des balles issues de la chaîne C présentent un défaut.

On choisit au hasard une balle dans la production de l'entreprise et on note les événements :

- A : « la balle provient de la chaîne A » ;
- B : « la balle provient de la chaîne B » ;
- C : « la balle provient de la chaîne C » ;
- D : « la balle présente un défaut ».

1. Construire un arbre pondéré traduisant cette situation.
2. Comment se note la probabilité de l'évènement « la balle présente un défaut et provient de la chaîne B » ?
3. Montrer que $P(D)$, la probabilité de l'évènement D, vaut 0,044.
4. Calculer $P_D(A)$, la probabilité de A sachant D, et donner un résultat arrondi à 0,001. Interpréter le résultat obtenu.
5. On choisit 12 balles au hasard dans la production totale qui est suffisamment importante pour que ce choix puisse être assimilé à douze tirages indépendants avec remise.
 - (a) Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de balles possédant un défaut. Déterminer la loi de probabilité de X dans cette situation.
 - (b) Quelle est la probabilité pour que 3 balles possèdent un défaut ? Arrondir le résultat à 0,000 1 et justifier la réponse.
 - (c) Quelle est la probabilité pour qu'au moins 3 balles possèdent un défaut ? Arrondir le résultat à 0,000 1 et justifier la réponse.
 - (d) Quelle est la moyenne de balles ayant un défaut dans cette situation ?
 - (e) Déterminer le plus petit nombre k de balles pour que $P(X \leq k) \geq 0,99$?

Correction Une entreprise fabrique des balles de tennis et dispose de trois chaînes de fabrication appelées A, B, C.

- La chaîne A fabrique 30 % de la production totale de l'entreprise.
- La chaîne B en fabrique 10 %.
- La chaîne C fabrique le reste de la production.



En sortie de chaines, certaines balles peuvent présenter un défaut.

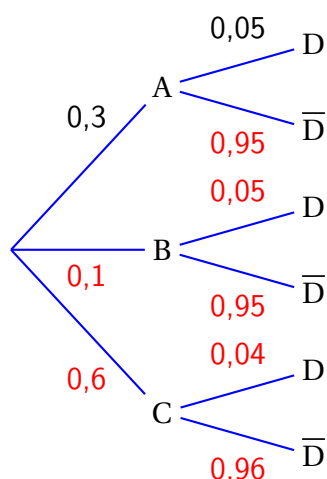
- 5 % des balles issues de la chaine A présentent un défaut.
- 5 % des balles issues de la chaine B présentent un défaut.
- 4 % des balles issues de la chaine C présentent un défaut.

On choisit au hasard une balle dans la production de l'entreprise et on note les évènements :

- A : « la balle provient de la chaine A » ;
- B : « la balle provient de la chaine B » ;
- C : « la balle provient de la chaine C » ;
- D : « la balle présente un défaut ».

1. Construire un arbre pondéré traduisant cette situation.

I L'arbre ci-dessous résume la situation



2. Comment se note la probabilité de l'évènement « la balle présente un défaut et provient de la chaine B » ?

L'évènement « la balle présente un défaut et provient de la chaine B » se note $B \cap D$.

Donc $P(B \cap D)$

3. Montrer que $P(D)$, la probabilité de l'évènement D, vaut 0,044.

On sait que A, B et C forment une partition

Alors d'après la formule des probabilités totales, $P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D)$

D'où $P(D) = P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D) + P(C) \times P_C(D) = 0,3 \times 0,05 + 0,1 \times 0,05 + 0,6 \times 0,04 = 0,015 + 0,005 + 0,024 = 0,044$

Donc $P(D) = 0,044$



4. Calculer $P_D(A)$, la probabilité de A sachant D, et donner un résultat arrondi à 0,001. Interpréter le résultat obtenu.

La probabilité de A sachant D, $P_D(A) = \frac{P(D \cap A)}{P(D)} = \frac{0,015}{0,044} \approx 0,341$.

Donc la probabilité que la balle provienne de la chaîne A sachant qu'elle a un défaut est de 0,341

- (a) Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de balles possédant un défaut. Déterminer la loi de probabilité de X dans cette situation.

La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 12 et 0,044 puisque :

- il y a deux issues possibles avec un défaut ou non
- il y a un tirage avec remise d'où l'indépendance
- la probabilité qu'une balle ait un défaut $p = 0,044$

- (b) Quelle est la probabilité pour que 3 balles possèdent un défaut ? Arrondir le résultat à 0,0001 et justifier la réponse.

Comme X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(12; 0,044)$, alors $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

Donc $P(X = 3) = \binom{12}{3} 0,044^3 (1 - 0,044)^{12-3} \approx 0,0125$

Donc la probabilité que 3 balles possèdent un défaut est 0,0125

- (c) Quelle est la probabilité pour qu'au moins 3 balles possèdent un défaut ? Arrondir le résultat à 0,0001 et justifier la réponse.

D'après la calculatrice, $P(X \geq 3) = 0,0139$

- (d) Quelle est la moyenne de balles ayant un défaut dans cette situation ?

On cherche donc l'espérance de X : $E(X) = n \times p = 12 \times 0,044 = 0,528$

Donc en moyenne, on peut estimer à moins d'une balle avec un défaut sur les 12

- (e) Déterminer le plus petit nombre k de balles pour que $P(X \leq k) \geq 0,99$?

Comme $P(X \leq 2) \approx 0,986$ et $P(X \leq 3) \approx 0,998$

Donc on trouve $k = 3$ pour avoir $P(X \leq k) \geq 0,99$

**Exercice 4.**

1,5 points

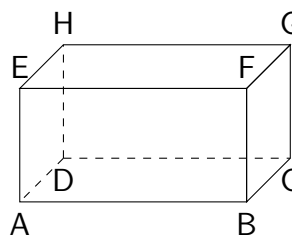
On considère le parallélépipède ABCDEFGH

- Remplacer le symbole par la lettre voulue

$$\overrightarrow{DB} = \square \overrightarrow{G} + \overrightarrow{DA}$$

- Déterminer les vecteurs suivants, c'est-à-dire simplifiez les expressions

$$\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \dots\dots\dots$$

**Correction**

On considère le parallélépipède ABCDEFGH

- Compléter par la lettre voulue

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{DA} \text{ réponse H}$$

- Déterminer le vecteur suivant, c'est-à-dire simplifiez l'expression afin d'obtenir un seul vecteur.

$$\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{GA}$$

